دورهٔ جمع‌بندی دوپینگ

جمعه
۱۴۰۴/۰۱/۱۵

بانک سؤالات کنکور:
جامع مشتق و کاربرد مشتق:
فصل ۴ و ۵ دوازدهم

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی
ریاضی

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
ریاضی	۴۱	۱	۴۱	۶۲ دقیقه

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم		هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع ـ توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی	جامع مشتق و کاربرد مشتق	الگو و دنباله + توان‌های گویا عبارت‌های جبری + جامع هندسه	جامع شمارش، بدون شمردن

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دفترچهٔ مکمل دوپینگ: این دفترچه روز بعد از آزمون دوپینگ هر درس در اختیار شما قرار می‌گیرد و شامل بانک سؤالات کنکورهای سراسری ۹۸ تا ۱۴۰۳ در همان مبحث است تا ضمن مرور مجدد، سیر تست‌های کنکور در هر مبحث را به دقت مورد بررسی قرار دهید.

سؤالات کنکور: فصل ۴ دوازدهم

۱- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۹۸)

ـ تعریف مشتق تابع f در $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ـ مشتق تابع $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}$$

ـ مشتق تابع $y=\sqrt{x}$:

$$y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

حد خواسته شده همان مشتق تابع در $x=۴$ است. به عبارت دیگر:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=f'(۴)$$

حال از تابع مشتق گرفته و $x=۴$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)-(-۲)(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^{۲}}$$

$$f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(-۳)+۲(۳)}{۹}=\frac{-\frac{۳}{۴}+۶}{۹}=\frac{\frac{۲۱}{۴}}{۹}=\frac{۷}{۱۲}$$

گروه آموزشی ماز

۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x-۱} & ; \quad x\ge ۲\\ -x^{۲}+ax+b & ; \quad x<۲\end{cases}$، روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۹۸)

برای اینکه تابع چند ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\ge a\\ h(x) & x<a\end{cases}$ در نقطهٔ مرزی یعنی $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو شرط زیر برقرار گردد:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

۲) مشتق چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند، یعنی:

$$f'_{+}(a)=f'_{-}(a)$$

چون تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس باید در نقطهٔ مرزی، شرایط زیر برقرار باشد:

شرط ۱: تابع در $x=۲$ پیوسته باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=f(۲)$$

$$-۴+۲a+b=۱\Rightarrow ۲a+b=۵$$

شرط ۲: مشتق چپ و راست تابع در $x=۲$ موجود و با هم برابر باشند، یعنی: $f'_+(۲)=f'_-(۲)$

$$\begin{cases} x<۲ \Rightarrow f'(x)=-۲x+a \Rightarrow f'_-(۲)=a-۴ \\ x>۲ \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-۱}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f'_+(۲)=-۱ \end{cases} \Rightarrow a-۴=-۱ \Rightarrow a=۳ \xrightarrow{۲a+b=۵} b=-۱$$

گروه آموزشی ماز

۳- اگر $g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x-۱}$ و $(fog)'(۲)=۶$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

$$(fog)'(x)=(f(g(x)))'=g'(x)f'(g(x))$$

ابتدا به کمک رابطهٔ مشتق تابع مرکب، داریم:

$$(fog)'(۲)=g'(۲)\times f'(g(۲))=۶$$

حال با استفاده از ضابطهٔ تابع g، مقادیر $g(۲)$ و $g'(۲)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱} \Rightarrow \begin{cases} g'(x)=\dfrac{۲\times(x-۱)-۱\times(۲x+۱)}{(x-۱)^۲} \xrightarrow{x=۲} g'(۲)=-۳ \\ g(۲)=۵ \end{cases}$$

$$(fog)'(۲)=-۳\times f'(۵)=۶ \Rightarrow f'(۵)=-۲$$

گروه آموزشی ماز

۴- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$، کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲) (کنکور داخل ۹۸)

ـ آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ـ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در $x=a$: $f'(a)$

ابتدا آهنگ تغییر لحظه‌ای و آهنگ تغییر متوسط تابع f را به‌دست می‌آوریم:

آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ $=\dfrac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\dfrac{(۸-\frac{۱}{۴})-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\dfrac{۱۱}{۴}$

آهنگ تغییرلحظه‌ای در $x=۲$ $=f'(x)=x+\dfrac{۱}{x^۲}\xrightarrow{x=۲}f'(۲)=۲+\dfrac{۱}{۴}=\dfrac{۹}{۴}$

بنابراین اختلاف آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای تابع برابر است با: اختلاف $=\dfrac{۱۱}{۴}-\dfrac{۹}{۴}=\dfrac{۲}{۴}=\dfrac{۱}{۲}=۰/۵$

گروه آموزشی ماز

۵- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{-x-۱}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۹۸)

ـ تعریف مشتق تابع f در $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ـ مشتق تابع $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$h'(x)=\frac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{g^{۲}(x)}$$

حد خواسته شده همان مشتق تابع در $x=\frac{۱}{۴}$ است. به عبارت دیگر:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}=f'(\frac{۱}{۴})$$

حال از تابع f مشتق گرفته و $x=\frac{۱}{۴}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{(\sqrt{x})^{۲}}=\frac{-\sqrt{x}+\frac{x+۱}{۲\sqrt{x}}}{x}=\frac{-x+۱}{۲x\sqrt{x}}\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}}f'(\frac{۱}{۴})=۳$$

گروه آموزشی ماز

۶ـ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۸}{ax+b} & ; \quad x>۲\\ -x^{۳}+۶x & ; \quad x\le ۲\end{cases}$، اگر $f'(۲)$ موجود باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۹۸)

برای اینکه تابع چند ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\ge a\\ h(x) & x<a\end{cases}$ در نقطهٔ مرزی $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

۲) مشتق چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند، یعنی:

$$f'_+(a)=f'_-(a)$$

چون $f'(۲)$ موجود است، بنابراین باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد، یعنی

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=f(۲)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۸}{ax+b}=\frac{۸}{۲a+b}\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}(-x^{۳}+۶x)=f(۲)=-(۲)^{۳}+۶(۲)=۴\end{cases}\Rightarrow \frac{۸}{۲a+b}=۴\Rightarrow ۲a+b=۲ \quad (*)$$

۲) مشتق چپ و راست تابع f در $x=۲$ باید موجود و با هم برابر باشد، یعنی:

$$f'_+(۲)=f'_-(۲)$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-۸a}{(ax+b)^{۲}} & ; \ x>۲\\ -۳x^{۲}+۶ & ; \ x<۲\end{cases}\Rightarrow f'_-(۲)=f'_+(۲)\Rightarrow -۶=\frac{-۸a}{(۲a+b)^{۲}}\xrightarrow{(*)}a=۳$$

گروه آموزشی ماز

۷- مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطهٔ $x=-3$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴) (کنکور خارج ۹۸)

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، داریم:

$$\bullet (f.g)' = f'g + g'f$$

$$\bullet f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$\bullet f(x)=\sqrt[n]{u^m} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

با استفاده از مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، از تابع داده شده مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} \Rightarrow f'(x)=(1)\times\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}+\frac{\frac{6-1}{(x+2)^2}}{3\sqrt[3]{(\frac{3x+1}{x+2})^2}}x \xrightarrow{x=-3} f'(-3)=\sqrt[3]{8}+\frac{\frac{5}{1}}{3\sqrt[3]{64}}(-3)=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۸- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{4x-5}{x+1}$ و دامنهٔ $[0,8]$، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به‌هم وصل کند، این خط مماس، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) -2 ۲) $-1/5$ ۳) -1 ۴) $-0/5$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴) (کنکور خارج ۹۸)

اگر خط به معادلهٔ $y=mx+b$ بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ مماس باشد:

۱) خط مماس و نمودار تابع در نقطهٔ تماس، مختصات برابری دارند، یعنی: $f(a)=ma+b$

۲) شیب خط مماس بر منحنی با مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر است، یعنی: $m=f'(a)$

۳) اگر نقطهٔ $A(a,b)$، نقطهٔ تماس باشد، معادلهٔ خط مماس برابر است با: $y=f'(a)(x-a)+b$

ابتدا شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای منحنی را در بازهٔ $[0,8]$ به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}A(0,-5)\\B(8,3)\end{cases} \Rightarrow m=\frac{3-(-5)}{8-0}=1$$

چون پاره‌خط موردنظر با خط مماس موازی است، پس باهم شیب برابری دارند، لذا شیب خط مماس برابر ۱ است. حال مشتق تابع را برابر ۱ قرار می‌دهیم و مختصات نقطهٔ تماس را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=1 \Rightarrow \frac{(4)(1)-(-5)(1)}{(x+1)^2}=1 \Rightarrow \begin{cases}x=2 \checkmark\\x=-4 \times\end{cases} \quad (0\le x\le 8)$$

حال عرض تابع را در نقطه‌ای به طول $x=2$ بر روی منحنی می‌یابیم:

$$f(2)=\frac{8-5}{2+1}=1$$

اکنون با داشتن مختصات نقطهٔ تماس یعنی $(2,1)$ و شیب خط مماس یعنی $m=1$، معادلهٔ خط مماس را تشکیل می‌دهیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)\xrightarrow[m=1]{(2,1)} y-1=1(x-2) \Rightarrow y=x-1 \xrightarrow[x=0]{\text{تماس با محور y ها}} y=-1$$

۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & ; \quad x\le -2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & ; \quad x>-2\end{cases}$ در $x=-2$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴) (کنکور داخل ۹۹)

برای اینکه تابع چندضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\ge a\\ h(x) & x<a\end{cases}$ در نقطهٔ مرزی $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، باید شروط زیر برقرار باشد:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

۲) مشتق چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند:

$$f'_+(a)=f'_-(a)$$

چون تابع f در $x=-2$ مشتق‌پذیر است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که این تابع در $x=-2$ پیوسته است، پس:

$$f(-2)=\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+} f(x)\Rightarrow \sqrt{5+4}=(-\frac{1}{2}\times 4)-2b+c\Rightarrow -2-2b+c=3\Rightarrow -2b+c=5\ (A)$$

حال از تابع f مشتق گرفته و داریم:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{2\sqrt{5-2x}} & x<-2\\ -x+b & x>-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(-2)=f'_-(-2)\Rightarrow 2+b=\frac{-2}{2\sqrt{5+4}}\Rightarrow 2+b=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=-\frac{7}{3}\xrightarrow{(A)} c=\frac{1}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$، در نقطهٔ $x=2$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴) (کنکور داخل ۹۹)

- $y=\frac{f}{g}\to y'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$
- $y=u^n\to y'=nu'u^{n-1}$

ابتدا ضابطهٔ تابع داده شده را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

حال مشتق تابع فوق را در $x=2$ به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-x)^3-3(2x-1)(x^2-x)^2(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$\Rightarrow f'(2)=\frac{(4+2)(4-2)^3-3\times3\times(4-2)^2\times(4+4)}{(4-2)^6}=\frac{6\times8-9\times4\times8}{64}=\frac{48-288}{64}=-\frac{240}{64}=-\frac{15}{4}$$

گروه آموزشی ماز

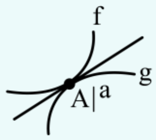
۱۱- خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ و $g(x)=ax^2+bx$، در نقطهٔ $x=2$، مشترک‌اند. مقدار b، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۹۹)

نکته:

اگر منحنی f و g در نقطه‌ای به طول $x=a$ بر هم مماس باشند:



۱) هر دو تابع در $x=a$ مقدار برابری دارند، یعنی: $f(a)=g(a)$

۲) هر دو تابع در $x=a$ مماس مشترک دارند، بنابراین شیب خط مماس بر نمودار هر دو تابع در این نقطه با هم برابر است، پس: $f'(a)=g'(a)$

خط مماس بر نمودار دو تابع f و g در نقطهٔ $x=2$ مشترک است، پس:

۱) شیب خط مماس بر نمودار (مشتق) هر دو تابع در $x=2$ با هم برابر است، پس: $f'(2)=g'(2)$

$$\begin{cases} f'(x)=\frac{(1)(-1)-(2)(1)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(2)=-3 \\ g'(x)=2ax+b\Rightarrow g'(2)=4a+b \end{cases}\Rightarrow 4a+b=-3$$

۲) مقدار دو تابع در $x=2$ با هم برابر است، یعنی: $f(2)=g(2)$

$$\begin{cases} f(2)=4 \\ g(2)=4a+2b \end{cases}\Rightarrow 4a+2b=4$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 4a+b=-3 \\ 4a+2b=4 \end{cases}\Rightarrow a=-\frac{5}{2},\ b=7$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$، در نقطهٔ $x=-2$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۹۹)

$$y=au^n\to y'=anu'u^{n-1}$$

ابتدا تابع f را به‌صورت $f(x)=\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{\frac{2}{3}}$ می‌نویسیم و داریم:

$$f(x)=\sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}\Rightarrow f(x)=\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{(2-2x)(3x+5)-3(2x-x^2)}{(3x+5)^2}\right)\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

حال $x=-2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f'(-2)=\frac{2}{3}\left(\frac{(6)(-1)-3(-8)}{(-1)^2}\right)\left(\frac{-8}{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\times(18)\times(8)^{\frac{-1}{3}}=6$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- فرض کنید $f(x)=(x[x^2+\frac{1}{2}])^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x=\frac{3}{\sqrt{8}}$، چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟

۱) -4 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

نکتهٔ ۱:

اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند:

$$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$$

نکتهٔ ۲:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \to y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^{۲}(x)}$$

نکتهٔ ۳:

$$y = \sqrt[m]{u^n} \to y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

می‌دانیم که مشتق تابع مرکب fog(x) به‌صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'\big(g(x)\big)$$

ما به‌دنبال مشتق تابع fog در $x = \frac{۳}{\sqrt{۸}}$ هستیم. لذا با توجه به رابطهٔ فوق داریم:

$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})) \quad (*)$$ رابطه

حالا با توجه به ضابطهٔ تابع g، مقادیر $g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ و $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ را پیدا می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}} \Rightarrow g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۳}{\sqrt{۸}})^{۲}-۱}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

$$g'(x) = \frac{-\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲}-۱)^{۲}}}}{(\sqrt[۳]{x^{۲}-۱})^{۲}} = \frac{-۲x}{۳(\sqrt[۳]{x^{۲}-۱})^{۲} \times \sqrt[۳]{(x^{۲}-۱)^{۲}}}$$

$$g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{-۲(\frac{۳}{\sqrt{۸}})}{۳\times\left(\sqrt[۳]{(\frac{۳}{\sqrt{۸}})^{۲}-۱}\right)^{۲} \times \sqrt[۳]{\left((\frac{۳}{\sqrt{۸}})^{۲}-۱\right)^{۲}}} = \frac{\frac{-۶}{\sqrt{۸}}}{۳\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}} = -۸\sqrt{۲}$$

حال برای پیدا کردن مقدار $f'(۲) = f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$، ابتدا تکلیف براکت را در تابع f مشخص کرده و سپس از آن در نقطهٔ $x = ۲$ مشتق می‌گیریم:

$$\left[x^{۲}+\frac{۱}{۲}\right] \xrightarrow{x=۲} \left[۴+\frac{۱}{۲}\right] = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = (۴x)^{۲}+۱ = ۱۶x^{۲}+۱$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۳۲x \xrightarrow{x=۲} f'(۲) = ۶۴$$

حال براساس رابطهٔ (*) داریم:

$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = (-۸\sqrt{۲})\times۶۴ = -۵۱۲\sqrt{۲} = -۴\times۱۲۸\sqrt{۲} = ۴\times(-۱۲۸\sqrt{۲})$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- فرض کنید $g(x) = ax^{۲}+bx+c$، $(a \neq ۰)$ و $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد. اگر **f** یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار **k** به شرط $b+c=a$، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

برای این که تابع چندضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} g(x) & x \ge a \\ h(x) & x < a \end{cases}$ در نقطهٔ مرزی $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) تابع f در نقطهٔ مرزی $x=a$ پیوسته باشد، یعنی: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

۲) مشتق چپ و راست تابع f در نقطهٔ $x=a$، موجود (متناهی) و با هم برابر باشند، یعنی: $f'_+(a)=f'_-(a)$

ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x\ge k \\ 2ax+b & x<k \end{cases}$$

می‌دانیم که f تابعی مشتق‌پذیر است، بنابراین این تابع اولاً باید در $x=k$ پیوسته باشد و ثانیاً مشتق چپ و راست این تابع در $x=k$ باید با هم برابر باشند، پس:

- شرط پیوستگی: $f(k)=\lim\limits_{x\to k^+} f(x)=\lim\limits_{x\to k^-} f(x) \quad (A)$

$$\begin{cases} f(k)=\lim\limits_{x\to k^+} f(x)=\lim\limits_{x\to k^+} ax^2+bx+c=ak^2+bk+c \\ \lim\limits_{x\to k^-} f(x)=\lim\limits_{x\to k^-} 2ax+b=2ak+b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(A)} ak^2+bk+c=2ak+b \quad (B)$$

- $f'_+(k)=f'_-(k)$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x\ge k \\ 2ax+b & x<k \end{cases} \xrightarrow{f'} f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x>k \\ 2a & x<k \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_+(k)=f'_-(k) \Rightarrow 2ak+b=2a \quad (C)$$

با توجه به روابط (B) و (C) داریم:

$$\begin{cases} 2ak+b=ak^2+bk+c \\ 2ak+b=2a \end{cases} \Rightarrow ak^2+bk+c=2a \Rightarrow ak^2+bk-2a+c=0$$

می‌دانیم که $b+c=a$ است، پس:

$$ak^2+bk-2a+c=0 \xrightarrow{c=a-b} ak^2+bk-2a+(a-b)=0 \Rightarrow ak^2+bk-a-b=0$$

در معادلهٔ درجهٔ دوم به‌دست‌آمده (برحسب k)، مجموع ضرایب معادله، برابر صفر است، پس:

$$\begin{cases} k=1 \\ k=\dfrac{-a-b}{a} \end{cases}$$

از طرفی این مقادیر به‌دست‌آمده برای k، باید در معادلهٔ (C) نیز صدق کنند، پس:

$$2ak+b=2a \Rightarrow \begin{cases} k=1 \Rightarrow 2a+b=2a \Rightarrow b=0 \\ k=\dfrac{-a-b}{a} \Rightarrow 2a(\dfrac{-a-b}{a})+b=2a \Rightarrow -2a-2b+b=2a \Rightarrow 4a=-b \end{cases}$$

حال در رابطهٔ $k=\dfrac{-a-b}{a}$، به جای $-b$، $4a$ را قرار می‌دهیم:

$$k=\frac{-a-b}{a} \xrightarrow{4a=-b} k=\frac{-a+4a}{a}=\frac{3a}{a}=3$$

بنابراین حداکثر مقدار k، برابر ۳ است.

گروه آموزشی ماز

۱۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

۱) -12 ۲) -8 ۳) 8 ۴) 12

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

تابعی وارون‌پذیر بوده و $(a,b)\in f$ باشد در این صورت $(b,a)\in f^{-1}$، با علم به این موضوع:f می‌دانیم که اگر:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}=$$ شیب خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در $x=b$

$$\bullet y=\frac{f(x)}{g(x)}\to y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)} \qquad \bullet y=u^n\to y'=nu'u^{n-1}$$

ابتدا ضابطهٔ وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow y(\sqrt{x}-1)=\sqrt{x}+1\Rightarrow y\sqrt{x}-y-\sqrt{x}-1=0\Rightarrow y\sqrt{x}-\sqrt{x}=y+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(y-1)=y+1\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{y+1}{y-1}\Rightarrow x=(\frac{y+1}{y-1})^2\Rightarrow y=f^{-1}(x)=(\frac{x+1}{x-1})^2$$

ضابطهٔ وارون تابع f، به‌صورت فوق به دست آمد، حال برای به‌دست‌آوردن شیب خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۲، از ضابطهٔ f^{-1} مشتق گرفته و $x=2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)=(\frac{x+1}{x-1})^2\to (f^{-1}(x))'=2(\frac{-1-1}{(x-1)^2})(\frac{x+1}{x-1})\xrightarrow{x=2}(f^{-1}(2))'=2(-2)(3)=-12$$

روش دوم:

ابتدا مختصات نقطهٔ تماس خط مماس با نمودار تابع f^{-1} را پیدا می‌کنیم و می‌دانیم که طول نقطهٔ تماس $x=2$ است، پس برای پیداکردن عرض نقطهٔ تماس داریم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=2\Rightarrow \sqrt{x}+1=2\sqrt{x}-2\Rightarrow \sqrt{x}=3\Rightarrow x=9$$

مختصات نقطهٔ تماس خط مماس بر نمودار تابع f^{-1}، برابر $A(2,9)$ است، پس می‌توانیم ادعا کنیم که نقطهٔ $B(9,2)$ روی نمودار تابع f قرار دارد. حال طبق نکتهٔ اول داریم:

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(9)} \quad (*)$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\xrightarrow{f'}f'(x)=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(\sqrt{x}-1)-(\frac{1}{2\sqrt{x}})(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(-2)}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=9}f'(9)=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{9}})(-2)}{(\sqrt{9}-1)^2}=\frac{-\frac{2}{6}}{4}=\frac{-2}{24}=-\frac{1}{12}$$

حال مطابق رابطهٔ $(*)$ داریم:

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(9)}\xrightarrow{f'(9)=-\frac{1}{12}}(f^{-1})'(2)=\frac{1}{-\frac{1}{12}}=-12$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- فرض کنید $f(x)=(x[x])^3$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$، مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $(-48\sqrt{5})$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند، داریم:

$$y=fog(x)=f(g(x))\to y'=g'(x)f'(g(x))$$

ابتدا فرمول مشتق تابع fog را تشکیل می‌دهیم: $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

ما به‌دنبال مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ هستیم، پس با توجه به رابطه بالا داریم:

مقدار حدی تابع g به ازای x های کمتر از $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=g'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-)\quad (*)$$ رابطه

مشتق چپ تابع g در $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

حال مقادیر فوق را به‌صورت جداگانه به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}\Rightarrow g'(x)=\frac{-x}{\sqrt{(x^۲-۱)^۳}}\Rightarrow g'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۲}}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^۳}}=\frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۲}}{۲^{-۳}}=-۴\sqrt{۵}$$

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}\Rightarrow g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۵}{۴})^--۱}}=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۵}{۴})^--\frac{۴}{۴}}}=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^-}}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^-}=۲^+$$

با توجه به‌حضور براکت در ضابطهٔ تابع f، ابتدا باید تکلیف براکت را مشخص کنیم.

$$x=\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)^-\Rightarrow g(x)=۲^+$$

$$f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-)=f'(۲^+)=f'_+(۲)$$

بنابراین به جای $[x]$، $[۲^+]$ یا ۲ قرار می‌دهیم و داریم:

$$f'_+(۲)=\left((۲x)^۳\right)'\Big|_{x=۲}=(۸x^۳)'\Big|_{x=۲}=۲۴x^۲\Big|_{x=۲}=۹۶$$

در نهایت با توجه به رابطه $(*)$ داریم:

$$(fog)'_-(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=-۴\sqrt{۵}\times ۹۶=۸\times(-۴۸\sqrt{۵})$$

همان‌طور که مشخص است، مقدار به‌دست‌آمده ۸ برابر $(-۴۸\sqrt{۵})$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۷- فرض کنید $g(x)=ax^۲+۵x+b$، اگر $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\le ۲\\ g'(x) & x>۲\end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

برای اینکه تابع چندضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\ge a\\ h(x) & x<a\end{cases}$ در نقطهٔ مرزی $x=a$ مشتق‌پذیر باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، یعنی: $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$

۲) مشتق چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند، یعنی: $f'_-(a)=f'_+(a)$

ابتدا با استفاده از ضابطهٔ تابع $g(x)=ax^۲+۵x+b$، ضابطهٔ تابع f را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & x\le ۲\\ g'(x) & x>۲\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}ax^۲+۵x+b & x\le ۲\\ ۲ax+۵ & x>۲\end{cases}$$

همان‌طور که از ضابطهٔ تابع f مشخص است هر یک از ضابطه‌های بالا و پایین، چندجمله‌ای بوده، بنابراین در دامنهٔ تعریف خود پیوسته و مشتق‌پذیرند، لذا برای این که تابع f همواره مشتق‌پذیر باشد باید در نقطهٔ مرزی $x=۲$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، پس:

- شرط پیوستگی:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^-} ax^۲+۵x+b=f(۲)=۴a+۱۰+b\\ \lim\limits_{x\to ۲^+} ۲ax+۵=۴a+۵\end{cases}\Rightarrow ۴a+۱۰+b=۴a+۵\Rightarrow b=-۵$$

- شرط مشتق‌پذیری:

$$\begin{cases}f'_+(x)=۲a\Rightarrow f'_+(۲)=۲a\\ f'_-(x)=۲ax+۵\Rightarrow f'_-(۲)=۴a+۵\end{cases}\Rightarrow ۴a+۵=۲a\Rightarrow ۲a=-۵\Rightarrow a=-\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{۵}{۲}\\ b=-۵\end{cases}\Rightarrow a+b=-\frac{۱۵}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- معادله خط مماس بر نمودار $y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به‌صورت $۴y-۳x=n$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

۱) می‌دانیم اگر توابع f و g در نقطه‌ای به طول $x=a$ بر هم مماس باشند:
$$\left.\begin{matrix}f'(a)=g'(a)\\ f(a)=g(a)\end{matrix}\right\}$$

۲) شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطهٔ $A(a,b)$ برابر $f'(a)$ است.

۳) اگر $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، آن‌گاه:
$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

می‌دانیم که شیب خط مماس همان مشتق تابع در نقطهٔ موردنظر است، پس ابتدا باید مشتق تابع y با شیب خط $۴y-۳x=n$ برابر باشد:

$$\begin{cases}\text{شیب خط}=\frac{۳}{۴}\\ y'=\frac{(۲x+m)(x+۳)-(۱)(x^۲+mx+۱)}{(x+۳)^۲}\xrightarrow{x=۱}y'(۱)=\frac{(۲+m)(۴)-(۱+m+۱)}{۱۶}\Rightarrow\frac{۳(۲+m)}{۱۶}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow m=۲\end{cases}$$

از طرفی در نقطه‌ای به طول $x=۱$، مقدار تابع با مقدار خط در این نقطه برابر است، پس:

$$۴y-۳x=n\xrightarrow{x=۱}۴y-۳=n\Rightarrow y=\frac{n+۳}{۴}$$

$$y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}\xrightarrow{x=۱}y=\frac{۱+m+۱}{۱+۳}\xrightarrow{m=۲}y=۱$$

$$\Rightarrow\frac{n+۳}{۴}=۱\Rightarrow n+۳=۴\Rightarrow n=۱\Rightarrow\begin{cases}n=۱\\ m=۲\end{cases}\Rightarrow m+n=۳$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{۲x^۲+x-۱}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

قاعدهٔ هوپیتال

اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{حدی}\circ}{\text{حدی}\circ}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}\to\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to 1}\frac{2f'(x)}{2}=f'(1)$$

$$f'(x)=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\left(2x^2+x-1\right)-x\sqrt{x}\left(4x+1\right)}{\left(2x^2+x-1\right)^2}$$

$$f'(1)=\frac{\frac{3}{2}(2)-5(1)}{2^2}=\frac{3-5}{4}=\frac{-1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۰- اگر $y=2x+b$ بر نمودار $y=\frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

اگر دو تابع f و g در $x=a$ مماس باشند:

$$\begin{cases}f(a)=g(a)\\ f'(a)=g'(a)\end{cases}$$

$$\begin{cases}2+b=\frac{1+a}{a+1}\Rightarrow b=-1\\ 2=\frac{1-a^2}{(a+1)^2}\Rightarrow\frac{1-a}{a+1}=2\Rightarrow a=\frac{-1}{3}\end{cases}\Rightarrow a-b=\frac{2}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ و $g(x)=\frac{1}{x^3-|x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) -1

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۴) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

مشتق تابع مرکب:

اگر f و g، دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $fog(x)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

$$\left(f(g(x))\right)'(-2)^{\frac{1}{3}}=?\qquad \underset{\substack{\uparrow\\ x<0}}{g(x)<0}\qquad g(x)=\frac{1}{2x^3}$$

$$f(g(x))=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲g(x)}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۲}{۲x^۳}}}=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x \Rightarrow (f(g(x)))'=۱$$

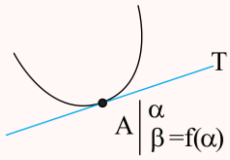
۲۲- خط مماس بر منحنی $f(x)=\frac{a}{۲x-۱}$ از نقاط $(۲/۵,۶)$ و $(-۰/۵,-۱۲)$ می‌گذرد. مقدار $f(۵)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

خط مماس

معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ واقع بر منحنی، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:



$$\text{شیب خط مماس}=m_T=f'(\alpha)$$
$$\text{معادله خط}: \ y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y-\beta=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

روش اول:

ابتدا معادلهٔ خط مماس را تشکیل می‌دهیم. می‌دانیم که این خط از دو نقطهٔ $(۲/۵,۶)$ و $(-۰/۵,-۱۲)$ عبور می‌کند، پس:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۶-(-۱۲)}{۲/۵-(-۰/۵)}=\frac{۶+۱۲}{۲/۵+۰/۵}=\frac{۱۸}{۳}=۶$$

$$\text{معادله خط مماس}: \ y-y_۰=m(x-x_۰)\xrightarrow[m=۶]{(۲/۵,۶)\in y} y-۶=۶(x-۲/۵)\Rightarrow y=۶x-۹$$

می‌دانیم که خط $y=۶x-۹$ بر منحنی $f(x)=\frac{a}{۲x-۱}$ مماس است، بنابراین معادلهٔ تقاطع آن‌ها ریشهٔ مضاعف دارد، یعنی Δ معادلهٔ تقاطع باید برابر صفر باشد.

$$\frac{a}{۲x-۱}=۶x-۹\Rightarrow ۱۲x^۲-۲۴x+۹-a=۰$$
$$\Delta=۰\Rightarrow (۲۴)^۲-۴(۱۲)(۹-a)=۰\Rightarrow ۵۷۶-۴۳۲+۴۸a=۰\Rightarrow ۴۸a=-۱۴۴\Rightarrow a=-۳$$

بنابراین ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=\frac{-۳}{۲x-۱}$ بوده و مقدار $f(۵)$ برابر است با:

$$f(۵)=\frac{-۳}{۱۰-۱}=\frac{-۳}{۹}=-\frac{۱}{۳}$$

روش دوم:

می‌دانیم که شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ $x=m$، با $f'(m)$ برابر است، پس:

$$\begin{cases} \text{خط مماس}: y=۶x-۹ \Rightarrow \text{شیب}=۶ \\ f(x)=\frac{a}{۲x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۲a}{(۲x-۱)^۲} \end{cases}\Rightarrow \frac{-۲a}{(۲x-۱)^۲}=۶\Rightarrow a=-۳(۲x-۱)^۲ \quad (A)$$

از طرفی باید طول نقطهٔ تماس را نیز به‌دست بیاوریم که برای این کار باید معادلهٔ خط مماس را با ضابطهٔ تابع f برابر قرار دهیم:

$$۶x-۹=\frac{a}{۲x-۱}\Rightarrow a=(۶x-۹)(۲x-۱)=۱۲x^۲-۲۴x+۹ \quad (B)$$

حال به کمک روابط (A) و (B) داریم:

$$-۳(۲x-۱)^۲=۱۲x^۲-۲۴x+۹\Rightarrow -۱۲x^۲+۱۲x-۳=۱۲x^۲-۲۴x+۹$$

$$\Rightarrow ۲۴x^۲-۳۶x+۱۲=۰\xrightarrow{\div ۱۲}۲x^۲-۳x+۱=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \ \checkmark \\ x=\frac{۱}{۲} \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

توجه کنید که $x=\frac{۱}{۲}$، مخرج ضابطهٔ f را صفر می‌کند، بنابراین طول نقطهٔ تلاقی $x=۱$ است، حال اگر $x=۱$ را در یکی از روابط(A) یا (B) جای‌گذاری کنیم، مقدار a به‌دست می‌آید:

$$a=-۳(۲x-۱)^۲ \xrightarrow{x=۱} a=-۳$$

در نتیجه، ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=\frac{-۳}{۲x-۱}$ بوده و مقدار $f(۵)$ برابر $-\frac{۱}{۳}$ خواهد بود، بنابراین گزینهٔ ۱ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۵ دوازدهم

۲۳- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x-۴|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۹۸)

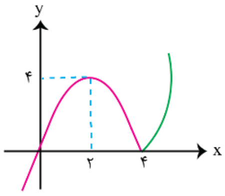
فاصلهٔ دو نقطه به مختصات $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با: $AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$

ابتدا ضابطهٔ تابع f را به‌صورت مقابل بازنویسی کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۲-۴x & ; x\geq ۴\\ -x^۲+۴x & ; x<۴\end{cases}$$

با رسم نمودار و با توجه به شکل تابع، مشخص است که نقاط $(۲,۴)$ و $(۴,۰)$ اکسترمم‌های تابع هستند، حال فاصلهٔ دو نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع برابر است با:

$$\sqrt{(۴-۲)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$



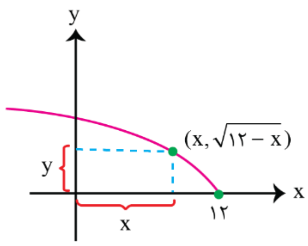
گروه آموزشی ماز

۲۴- بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۱۲-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۹۸)

می‌دانیم هر نقطه که روی منحنی y قرار داشته باشد مختصات آن به‌صورت $(x,\sqrt{۱۲-x})$ تعریف می‌شود، بنابراین مطابق شکل مقابل مساحت مستطیل برابر است با:



$$S=xy=x\sqrt{۱۲-x}$$

$$\Rightarrow S'=\sqrt{۱۲-x}+\frac{-x}{۲\sqrt{۱۲-x}}=۰\Rightarrow \sqrt{۱۲-x}=\frac{x}{۲\sqrt{۱۲-x}}\Rightarrow ۲(۱۲-x)=x\Rightarrow x=۸$$

$$y=\sqrt{۱۲-x}\xrightarrow{x=۸} y=\sqrt{۱۲-۸}=۲ \quad\Rightarrow S_{max}=۸\times ۲=۱۶$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x|-۲x$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) ۴

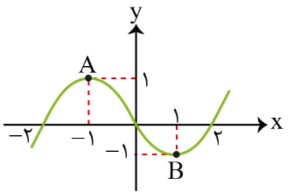
پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۹۸)

فاصلهٔ دو نقطه به مختصات $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر بازنویسی کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x|x|-2x=\begin{cases}x^2-2x & ; x\geq 0\\ -x^2-2x & ; x<0\end{cases}$$



با توجه به شکل، مشخص است که نقاط $(1,-1)$ و $(-1,1)$ اکسترمم‌های تابع هستند.

حال فاصلهٔ دو نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع برابر است با:

$$AB=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

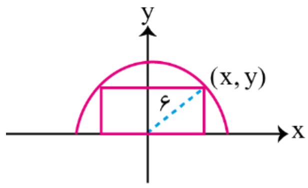
۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۹۸)

با توجه به شکل زیر، ابتدا معادلهٔ نیم‌دایره به شعاع ۶ و مرکز مبدأ را نوشته و طبق آن، مساحت مستطیل برابر است با:

$$x^2+y^2=36\Rightarrow y=\sqrt{36-x^2}\xrightarrow{S=2xy}S=2x\sqrt{36-x^2}$$

حال برای اینکه مساحت مستطیل بیشینه شود، باید $S'=0$ باشد. پس:



$$S=2x\sqrt{36-x^2}\Rightarrow S'=2\sqrt{36-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}}(2x)=0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{36-x^2}=\frac{2x^2}{\sqrt{36-x^2}}\Rightarrow 36-x^2=x^2\Rightarrow 2x^2=36\Rightarrow x^2=18\Rightarrow x=\sqrt{18}$$

حال طبق رابطهٔ مساحت مستطیل داریم:

$$S=2x\sqrt{36-x^2}\xrightarrow{x=\sqrt{18}}S_{max}=2\sqrt{18}\sqrt{36-18}=2\times18=36$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- فاصلهٔ نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{4x-x^2}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۹۹)

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

توجه داریم که دامنهٔ تابع بازهٔ $[0,4]$ می‌باشد:

$$D_f=[0,4]$$

حال از تابع f مشتق گرفته و ریشه‌های آن را در جدول تغییرات تابع رسم می‌کنیم:

$$f(x)=x+\sqrt{4x-x^2}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=1+\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}=0\Rightarrow 1=\frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}\Rightarrow\sqrt{4x-x^2}=x-2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲ طرفین}}4x-x^2=x^2-4x+4\Rightarrow 2x^2-8x+4=0\Rightarrow x^2-4x+2=0\Rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$$

x	۰		$2+\sqrt{2}$		۴
y'		+	۰	−	
y		↗	max	↘	

با توجه به جدول فوق، مقدار ماکسیمم نسبی برابر است با:

$$f(2+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$$

مختصات نقطهٔ ماکسیمم نسبی: $A(2+\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$

توجه داشته باشید که $x=2-\sqrt{2}$ قابل قبول نیست زیرا باید $x\geq 2$ باشد.

حال فاصلهٔ نقطهٔ A از نیمساز ربع اول $(y=x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{فاصله}=\frac{|2+\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

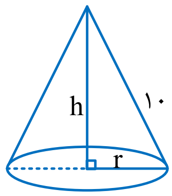
گروه آموزشی ماز

۲۸- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{2}{1}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{1}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۹۹)

می‌دانیم که حجم مخروط برابر $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ است و از طرفی طبق قضیهٔ فیثاغورس در شکل زیر می‌توان گفت که:



$$h^2+r^2=100\Rightarrow r^2=100-h^2$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(100-h^2)h=\frac{1}{3}\pi(100h-h^3)$$

حال برای آن‌که بیشترین حجم را داشته باشیم، باید مشتق تابع حجم را برابر صفر قرار دهیم:

$$V'(h)=0\Rightarrow\frac{1}{3}\pi(100-3h^2)=0\Rightarrow 3h^2=100\Rightarrow h^2=\frac{100}{3}$$

از طرفی طبق رابطهٔ $r^2=100-h^2$ داریم:

$$r^2=100-\frac{100}{3}=\frac{200}{3}\Rightarrow r^2=\frac{200}{3}$$

درنهایت نسبت دو ضلع قائم مثلث برابر است با:

$$\frac{r^2}{h^2}=\frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}}=2\Rightarrow\frac{r}{h}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}$، کدام است؟

۱) $-1+\sqrt{5}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1+\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۹۹)

ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+1)-(2x)(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+8x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x^2+8x+2}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow -2x^2+8x+2=0\Rightarrow x=2\pm\sqrt{5}$$

حال مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

x		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

تابع در $x=2+\sqrt{5}$ ماکسیمم نسبی دارد که مقدار آن برابر است با:

$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۲(۲+\sqrt{۵})-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}=\frac{۱۰+۶\sqrt{۵}}{۱۰+۴\sqrt{۵}}=۱+\frac{\sqrt{۵}}{۵+۲\sqrt{۵}}=۱+\frac{۱}{\sqrt{۵}+۲}=۱+(\sqrt{۵}-۲)=\sqrt{۵}-۱$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطه $A(۵,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۲x+۷}$ ، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۹۹)

هر نقطهٔ روی منحنی y ، به مختصات $B(x,\sqrt{۲x+۷})$ است، حال فاصلهٔ نقطهٔ A از B را به دست می‌آوریم:

$$L=AB=\sqrt{(x-۵)^۲+(\sqrt{۲x+۷}-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}$$

حال برای اینکه این فاصله، کمترین باشد، داریم:

$$L'=\frac{۲x-۸}{۲\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}=۰\Rightarrow ۲x-۸=۰\Rightarrow x=۴$$

کمترین فاصله به ازای $x=۴$ ، رخ می‌دهد که مقدار آن برابر است با:

$$\sqrt{(۴)^۲-۸(۴)+۳۲}=۴$$

گروه آموزشی ماز

۳۱- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲-۱}|x^۲-۴|$ ، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

چون $x=\pm۲$ نقاط گوشه‌ای و $x=۰$ ریشهٔ مرتبهٔ دوم تابع است، بنابراین این نقاط، نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند. حال برای یافتن نقاط بیشتر، به سراغ مشتق گرفتن از تابع می‌رویم:

$$f(x)=\frac{x^۲|x^۲-۴|}{x^۲-۱}$$

فرض می‌کنیم که $x^۲-۴>۰$ است. پس:

$$f'(x)=\frac{(۴x^۳-۸x)(x^۲-۱)-(۲x)(x^۴-۴x^۲)}{(x^۲-۱)^۲}=\frac{۴x^۵-۴x^۳-۸x^۳+۸x-۲x^۵+۸x^۳}{(x^۲-۱)^۲}$$

$$f'(x)=\frac{۲x^۵-۴x^۳+۸x}{(x^۲-۱)^۲}=\frac{۲x(x^۴-۲x^۲+۴)}{(x^۲-۱)^۲}=۰\Rightarrow\begin{cases}۲x=۰\to x=۰\\ x^۴-۲x^۲+۴=۰\to \text{ریشه ندارد}\end{cases}$$

بنابراین غیر از نقاط گفته‌شده، ($x=۰$ ، $x=۲$ ، $x=-۲$) تابع نقطهٔ اکسترمم نسبی دیگری ندارد.

توجه:

اگر $x^۲-۴$ را منفی نیز فرض کنیم، تفاوتی در جواب‌های مشتق حاصل نمی‌شود.

گروه آموزشی ماز

۳۲- قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x)=x^۲$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل بر تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA' ، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

نکتهٔ ۱:

قرینهٔ نقطهٔ A به مختصات $A(x,y)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $(y=x)$ ، برابر (y,x) است.

نکتهٔ ۲:

فاصلهٔ دو نقطهٔ به مختصات $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ از یکدیگر برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

نکتهٔ ۳:

در عبارت درجهٔ دوم به فرم $y=ax^2+bx+c$ ، مختصات رأس آن برابر است با:

$$\begin{cases} x_S=-\dfrac{b}{2a} \\ y_S=\dfrac{-\Delta}{4a} \end{cases}$$

روش اول:

می‌دانیم هر نقطه که روی منحنی تابع $f(x)=x^2$ قرار داشته باشد، مختصات آن به‌صورت $A(\alpha,\alpha^2)$ تعریف می‌شود. لذا قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم به‌صورت $A'(\alpha^2,\alpha)$ است. پس:

$$\begin{cases} A(\alpha,\alpha^2) \\ A'(\alpha^2,\alpha) \end{cases} \Rightarrow AA'=\sqrt{(\alpha^2-\alpha)^2+(\alpha-\alpha^2)^2}=\sqrt{2(\alpha-\alpha^2)^2}=\sqrt{2}\left|\alpha-\alpha^2\right| \quad (*)$$

حال نقاط برخورد تابع f با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرار دارد (منظورش اینه که طول نقطهٔ A بین $x=0$ و $x=1$ قرار دارد)، پس $0<x_A=\alpha<1$ است، بنابراین:

$$0<\alpha<1 \Rightarrow \alpha>\alpha^2 \Rightarrow \left|\alpha-\alpha^2\right|=\alpha-\alpha^2$$

حال در رابطهٔ $(*)$ داریم:

$$AA'=\sqrt{2}(\alpha-\alpha^2)=-\sqrt{2}\alpha^2+\sqrt{2}\alpha$$

می‌دانیم که در عبارت درجهٔ دوم $y=ax^2+bx+c$ ، ماکزیمم مقدار برابر $-\dfrac{\Delta}{4a}$ است. (البته اگر $a<0$ باشد)

$$\max(AA')=-\frac{(\sqrt{2})^2-4(-\sqrt{2})(0)}{4(-\sqrt{2})}=\frac{-2}{-4\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

روش دوم:

برای اینکه AA' ماکزیمم شود از رابطهٔ آن نسبت به α مشتق گرفته و برابر صفر می‌گذاریم:

$$(AA')'=-2\sqrt{2}\alpha+\sqrt{2}=0 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

حال $\alpha=\dfrac{1}{2}$ را در رابطهٔ AA' قرار داده و مقدار آن را پیدا می‌کنیم:

$$AA'=-\sqrt{2}\alpha^2+\sqrt{2}\alpha \xrightarrow{\alpha=\frac{1}{2}} AA'=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۳۳- حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می‌شود، کدام است؟

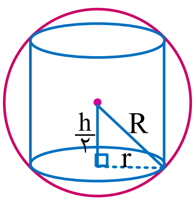
۱) 32π ۲) 64π ۳) $\dfrac{256\pi}{3}$ ۴) $\dfrac{512\pi}{3}$

پاسخ : گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

روش اول:

با توجه به شکل مقابل داریم:

$$\begin{cases} \text{شعاع استوانه}=r \\ \text{شعاع کره}=R \\ \text{ارتفاع استوانه}=h \end{cases}$$



$$R^2=(\frac{h}{2})^2+r^2 \xrightarrow{R=4\sqrt{2}} (4\sqrt{2})^2=(\frac{h}{2})^2+r^2 \Rightarrow 32=\frac{h^2}{4}+r^2 \Rightarrow \frac{h^2}{4}+r^2=32 \Rightarrow r=\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}$$

می‌دانیم که مساحت‌جانبی استوانه برابراست با: $S=2\pi rh$ که باید حداکثر مقدار خود را داشته باشد، پس:

$$S=2\pi rh \Rightarrow S=2\pi\times\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}\times h$$

حال از رابطهٔ فوق نسبت به h مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S'=0 \Rightarrow 2\pi(\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}+\frac{-\frac{h}{2}\times h}{2\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}})=0 \Rightarrow \frac{h^2}{4\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}}=\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}$$

$$\Rightarrow h^2=4(32-\frac{h^2}{4}) \Rightarrow h^2=128-h^2 \Rightarrow 2h^2=128 \Rightarrow h^2=64 \Rightarrow h=8$$

حال $h=8$ را در رابطهٔ $\frac{h^2}{4}+r^2=32$ قرار داده و مقدار r را می‌یابیم:

$$\frac{64}{4}+r^2=32 \Rightarrow r^2=32-16 \Rightarrow r^2=16 \Rightarrow r=4$$

لذا حداکثر مساحت جانبی استوانه برابر است با:

$$S_{max}=2\times\pi\times4\times8=64\pi$$

روش دوم:

با توجه به اینکه توان r و h در هر دو رابطه با هم برابر است، حداکثر مساحت جانبی استوانه زمانی رخ می‌دهد که:

$$\begin{cases} r^2=16 \to r=4 \\ \frac{h^2}{4}=16 \to h^2=64 \to h=8 \end{cases} \Rightarrow S_{max}=2\pi rh=2\times\pi\times4\times8=64\pi$$

گروه آموزشی ماز

۳۴- مینیمم مطلق تابع $f(x)=x|3-x^2|$ در بازهٔ $[-1/5,\sqrt{3}]$، کدام است؟

۱) $-\frac{9}{4}$ ۲) -2 ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) $-\frac{9}{8}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

دسته‌بندی نقاط بحرانی:

۱) نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است.
۲) نقاطی که مشتق تابع در آن نقاط برابر صفر است.
۳) نقاط ابتدا و انتهای بازه (به شرطی که بازه بسته باشد.)

مراحل تعیین اکسترمم‌های مطلق

۱) به‌دست‌آوردن نقاط بحرانی
۲) به‌دست‌آوردن مقدار تابع به ازای نقاط بحرانی ⇐ بیشترین مقدار = ماکسیمم مطلق ، کمترین مقدار = مینیمم مطلق

ابتدا با تعیین تکلیف قدرمطلق، ضابطهٔ تابع f را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=x|3-x^2| \Rightarrow \begin{cases} x(x^2-3) & x>\sqrt{3} \\ x(3-x^2) & -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3} \\ x(x^2-3) & x<-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3-3x & x>\sqrt{3} \\ -x^3+3x & -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3} \\ x^3-3x & x<-\sqrt{3} \end{cases}$$

حال از تابع f مشتق می‌گیریم (توجه: تابع f در نقاط مرزی $x=\sqrt{3}$ و $x=-\sqrt{3}$ مشتق‌ناپذیر است):

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-3 & x>\sqrt{3}\\ -3x^2+3 & -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\\ 3x^2-3 & x<-\sqrt{3}\end{cases}\xrightarrow{\text{ریشه‌های مشتق}}\begin{cases}3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm1\xrightarrow{x>\sqrt{3}}\varnothing\\ -3x^2+3=0\Rightarrow x=\pm1\\ 3x^2-3=0\Rightarrow x=\pm1\xrightarrow{x<-\sqrt{3}}\varnothing\end{cases}$$

$\left[-1/5,\sqrt{3}\right]$ نقاط بحرانی تابع در بازهٔ : $\left\{-1/5,-1,1,\sqrt{3}\right\}$

دقت شود که $x=-\sqrt{3}$ در محدودهٔ گفته شده حضور ندارد. حال مقدار تابع f را به ازای طول نقاط بحرانی پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(-1/5)=-1/5\left|3-\frac{9}{4}\right|=-1/5\times\frac{3}{4}=-\frac{9}{8}\\ f(-1)=-1\left|3-(-1)^2\right|=-1\times2=-2\\ f(1)=1\times\left|3-(1)^2\right|=1\times2=2\\ f(\sqrt{3})=\sqrt{3}\left|3-(\sqrt{3})^2\right|=\sqrt{3}\times0=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2=\text{بیشترین عرض}=\text{ماکسیمم مطلق}\\ -2=\text{کمترین عرض}=\text{مینیمم مطلق}\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۳۵- قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{-x}$ را در دامنهٔ $[0,1]$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم صفحهٔ مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره‌خط AA'، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ ۲) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$ ۳) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

ـ قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $(y=-x)$، برابر $(-y,-x)$ است.

ـ فاصلهٔ دو نقطه به مختصات $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ از یکدیگر برابر است با: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

می‌دانیم هر نقطه که روی منحنی تابع $f(x)=\sqrt[3]{-x}$ قرار داشته باشد، مختصات آن به‌صورت $A(\alpha,\sqrt[3]{-\alpha})$ تعریف می‌شود، لذا قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم به‌صورت $A'(-\sqrt[3]{-\alpha},-\alpha)$ است، پس:

$$\begin{cases}A(\alpha,\sqrt[3]{-\alpha})\\ A'(-\sqrt[3]{-\alpha},-\alpha)\end{cases}\Rightarrow AA'=\sqrt{(-\sqrt[3]{-\alpha}-\alpha)^2+(-\alpha-\sqrt[3]{-\alpha})^2}=\sqrt{2(-\alpha-\sqrt[3]{-\alpha})^2}=\sqrt{2}\left|-\alpha+\sqrt[3]{\alpha}\right|$$

از طرفی چون دامنهٔ تابع به‌صورت $[0,1]$ است، پس $0\le\alpha\le1$ قرار دارد، بنابراین $\sqrt[3]{\alpha}\ge\alpha$ است و داریم:

$$\sqrt[3]{\alpha}\ge\alpha\Rightarrow\sqrt[3]{\alpha}-\alpha\ge0\Rightarrow AA'=\sqrt{2}(\sqrt[3]{\alpha}-\alpha)$$

حال برای اینکه طول پاره‌خط AA' ماکزیمم باشد، از رابطهٔ آن نسبت به α مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(AA')'=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{\alpha^2}}-1\right)=0\Rightarrow3\sqrt[3]{\alpha^2}=1\Rightarrow\sqrt[3]{\alpha^2}=\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{توان ۳}}\alpha^2=\frac{1}{27}\Rightarrow\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{27}}\xrightarrow{0\le\alpha\le1}\alpha=\frac{1}{\sqrt{27}}$$

حال مقدار $\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۲۷}}$ را در رابطهٔ AA' جای‌گذاری کرده و مقدار آن را پیدا می‌کنیم:

$$AA' = \sqrt{۲}(\sqrt[۳]{\alpha} - \alpha) \Rightarrow AA' = \sqrt{۲}\left(\sqrt[۳]{\frac{۱}{\sqrt{۲۷}}} - \frac{۱}{\sqrt{۲۷}}\right) = \sqrt{۲}\left(\sqrt[۳]{\frac{۱}{(\sqrt{۳})^۳}} - \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}\right) = \sqrt{۲}\left(\frac{۲}{۳\sqrt{۳}}\right) = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$$

گروه آموزشی ماز

۳۶- کوتاه‌ترین فاصلهٔ سهمی $y^۲ = ۴x$، از نقطهٔ $M(۳,۰)$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

ابتدا نقطه‌ای به طول $x = \alpha$ روی سهمی $y^۲ = ۴x$ فرض می‌کنیم، پس: $A(\alpha, \pm ۲\sqrt{\alpha})$

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نقطهٔ M به مختصات $M(۳,۰)$ به‌دست می‌آوریم:

$$AM = \sqrt{(۳-\alpha)^۲ + (۰ \pm ۲\sqrt{\alpha})^۲} = \sqrt{۹ - ۶\alpha + \alpha^۲ + ۴\alpha} = \sqrt{\alpha^۲ - ۲\alpha + ۹}$$

می‌خواهیم این فاصله کمترین باشد، بنابراین از رابطهٔ بالا نسبت به α مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم، پس:

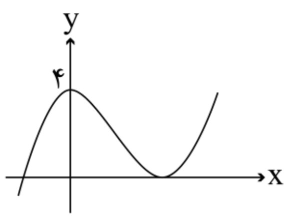
$$(AM)' = \frac{۲\alpha - ۲}{۲\sqrt{\alpha^۲ - ۲\alpha + ۹}} = ۰ \Rightarrow ۲\alpha - ۲ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۱$$

حال اندازهٔ AM را به ازای $\alpha = ۱$ به دست می‌آوریم:

$$AM = \sqrt{\alpha^۲ - ۲\alpha + ۹} \xrightarrow{\alpha = ۱} AM = \sqrt{۱ - ۲ + ۹} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- نمودار تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ به‌صورت زیر است. طول نقطه مینیمم نسبی تابع، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

اگر در $x = a$، خط مماس بر نمودار، افقی باشد آن‌گاه $f'(a) = ۰$ است.

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} f'(۰) = ۰ \\ f(۰) = ۴ \end{cases}$$

$$f(۰) = ۴ \Rightarrow ۰ + ۰ + ۰ + c = ۴ \Rightarrow c = ۴$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \xrightarrow{f'(۰) = ۰} ۰ + ۰ + b = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

$$f(x) = x^۳ + ax^۲ + ۴$$

با توجه به شکل می‌توان فهمید تابع در دو نقطه، مماس افقی دارد یعنی در دو نقطه مشتق برابر صفر است. لذا:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲ax = ۰ \Rightarrow x(۳x + ۲a) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{۲a}{۳} \end{cases}$$

پس طول نقطهٔ min نسبی تابع برابر $x=-\frac{۲a}{۳}$ است که با توجه به شکل، مقدار تابع در این نقطه برابر صفر است. پس: $f(-\frac{۲a}{۳})=۰$

$$(-\frac{۲a}{۳})^۳+a(-\frac{۲a}{۳})^۲+۴=۰\Rightarrow\frac{-۸a^۳}{۲۷}+\frac{۴a^۳}{۹}+۴=۰\Rightarrow\frac{-۸a^۳+۱۲a^۳}{۲۷}=-۴\Rightarrow\frac{۴a^۳}{۲۷}=-۴$$

$$\Rightarrow a^۳=-۲۷\Rightarrow a=-۳$$

از قبل می‌دانیم که طول نقطهٔ min نسبی برابر $\frac{-۲a}{۳}$ است، پس

$$x_{min}=-\frac{۲a}{۳}=-\frac{۲(-۳)}{۳}=۲$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- از بین مخروط‌های حاصل که از دوران کامل پاره‌خط AB به اندازهٔ $۳\sqrt{۳}$ حول خط L به‌دست می‌آیند، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطهٔ A روی خط L واقع است.)

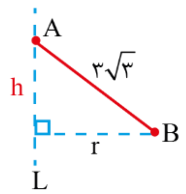
۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

حجم مخروط به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r از رابطهٔ $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ به‌دست می‌آید.

۲) تابع f(x) به ازای نقاط بحرانی، بیشترین یا کمترین مقدار خود را دارد.

۳) نقاط بحرانی، نقاطی از دامنهٔ تابع هستند که مشتق در آن نقاط، صفر یا تعریف نشده باشد.



$$(۳\sqrt{۳})^۲=r^۲+h^۲\Rightarrow r^۲+h^۲=۲۷\Rightarrow r^۲=۲۷-h^۲$$

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\pi(۲۷-h^۲)h$$

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(۲۷h-h^۳)$$

$$V'_h=۰\Rightarrow V'_h=\frac{۱}{۳}\pi(۲۷-۳h^۲)=۰\Rightarrow ۲۷-۳h^۲=۰\Rightarrow h^۲=\frac{۲۷}{۳}=۹\Rightarrow\begin{cases}h=-۳ \times\\ h=+۳ \checkmark\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۳۹- نمودار تابع $y=x^۳+ax^۲-۲bx-۴$ در نقاطی به طول صفر و ۲- دارای اکسترمم نسبی است. فاصله بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع، چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۱۱}$ ۳) $۲\sqrt{۱۵}$ ۴) $۲\sqrt{۱۰۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

اگر $x=a$ اکسترمم نسبی تابع چندجمله‌ای $f(x)$ باشد، $x=a$ ریشهٔ مشتق $f(x)$ خواهد بود:

$$f'(x)=۳x^۲+۲ax-۲b$$

$$f'(۰)=۰\Rightarrow b=۰$$

$$f'(-۲)=۰\Rightarrow ۱۲-۴a=۰\Rightarrow a=۳$$

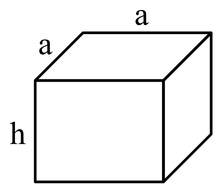
$$\Rightarrow f(x)=x^۳+۳x^۲-۴\Rightarrow \text{نقاط اکسترمم}\begin{cases}(۰,-۴)\\(-۲,۰)\end{cases}\Rightarrow\sqrt{۲^۲+۴^۲}=۲\sqrt{۵}$$

گروه آموزشی ماز

۴۰- در ساخت قوطی‌های حلبی درباز به شکل مکعب‌مستطیل با قاعده مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۱)



$$v = a^{۲}h \Rightarrow a^{۲}h = ۴ \Rightarrow h = \frac{۴}{a^{۲}}$$

$$S = a^{۲} + ۴ah = a^{۲} + \frac{۱۶}{a} \xrightarrow{S'=۰} ۲a - \frac{۱۶}{a^{۲}} = ۰ \Rightarrow a^{۳} = ۸ \Rightarrow a = ۲ \ , \ h = ۱$$

$$\Rightarrow S = a^{۲} + ۴ah = ۱۲$$

گروه آموزشی ماز

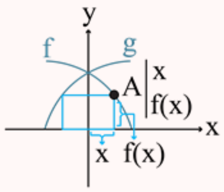
۴۱- مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که دو رأس آن بر محور xها و دو رأس دیگر آن یکی بر $y = \sqrt{x+۱}$ و دیگری بر $y = \sqrt{۲-x}$ قرار دارد، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$　۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　۳) $\sqrt{۳}$　۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۲۰۵) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

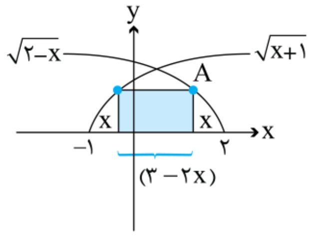
بهینه‌سازی

در مسائل مربوط به بهینه‌سازی به‌دنبال محاسبهٔ max یا min عبارتی هستیم که به آن تابع هدف می‌گوییم. تابع هدف معمولاً شامل دو یا چند متغیر است، که ابتدا باید با روابط ریاضی تعداد متغیرها را به یکی کاهش دهیم و بعد max یا min تابع هدف را با مشتق‌گیری محاسبه کنیم. یکی از سؤالات معروف بهینه‌سازی، محاسبهٔ مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی است که دو رأس آن روی منحنی‌های $f(x)$ و $g(x)$ و یک ضلع آن روی محور x قرار می‌گیرد. تصویر را ببینید:



با توجه به شکل مقابل، مختصات نقطهٔ A برابر است با:

$$x_A = (۲ - x)$$
$$y_A = \sqrt{۲-(۲-x)} = \sqrt{x}$$



از طرفی طول و عرض مستطیل برابر است با:

$$\begin{cases} \text{طول مستطیل} : (۳-۲x) \\ \text{عرض مستطیل} : y_A = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow S = (۳-۲x)\sqrt{x}$$

حال، از رابطهٔ مساحت مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = ۰ \Rightarrow -۲\sqrt{x} + \frac{(۳-۲x)}{۲\sqrt{x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۳-۲x}{۲\sqrt{x}} = ۲\sqrt{x} \Rightarrow ۳-۲x = ۴x \Rightarrow ۶x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین بیش‌ترین مساحت مستطیل برابر است با:

$$S_{max} = (۳-۲x)\sqrt{x} \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} S = ۲\sqrt{\frac{۱}{۲}} = ۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

گروه آموزشی ماز